

1-3-112

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION — OCTOBER/NOVEMBER 2018

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

THIRD SEMESTER

Part II – Mathematics

Paper I — ABSTRACT ALGEBRA

(w.e.f. 2016-17)

Time : 3 hours

Max. Marks : 75

SECTION – I

సెక్షన్ - I

Answer any FIVE of the following questions.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానము వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 5 = 25)

1. If G is a group and $a, b \in G$ then show that the equation $ax = b$ and $ya = b$ have unique solution in G .
అను సమూహములో $a, b \in G$ అగినట్లు $ax = b$ మరియు $ya = b$ లకు G లో ఏకైక సాధన వుంటుందని చూపండి.
2. Show that (Z_5, X_5) is an abelian group.
 (Z_5, X_5) అనునది వినిమయ సమూహము అని చూపండి.
3. If H is sub-group of group G then show that $H^{-1} = H$.
సమూహము G లో H ఉపసమూహమయితే $H^{-1} = H$ అని చూపండి.
4. Define co-sets. If H is sub-group of group G and $a, b \in G$ then show that $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
సహసమితులను నిర్వచించండి. సమూహము G లో H ఉపసమూహము మరియు $a, b \in G$ అయితే $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ అని చూపండి.

[P.T.O.]

5. Define Normal sub-group. Show that every sub-group of an abelian group is Normal.
అభిలంబ ఉపసమూహాన్ని నిర్వచించండి. వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహమని చూపండి.
6. Let G, G' be two group and $f: G \rightarrow G'$ is a homomorphism then show that $f(e) = e'$ and $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$, $e \in G, e' \in G', a \in G$.
 G, G' లు రెండు సమూహాలు మరియు $f: G \rightarrow G'$ సమరూపత అయితే $f(e) = e'$ మరియు $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$, $e \in G, e' \in G', a \in G$ అని చూపండి.
7. Show that every cyclic group is abelian.
ప్రతి చక్రీయ సమూహము వినిమయ సమూహమని చూపండి.
8. Define odd and even permutation. Show that $(1\ 6\ 5\ 2)$ is an odd permutations.
బేసి మరియు సరి ప్రస్తారాలను నిర్వచించండి. $(1\ 6\ 5\ 2)$ బేసి ప్రస్తారమని చూపండి.

SECTION - II

సెక్షన్ - II

Answer any FIVE of the following.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానము వ్రాయుము.

(Marks : $5 \times 10 = 50$)

9. (a) If $G = Q - \{1\}$ and '0' defined on G as $a \circ b = a + b - ab$ then show that (G, \circ) is an abelian group.

$G = Q - \{1\}$ మరియు '0' ను G పై $a \circ b = a + b - ab$ గా నిర్వచిస్తే (G, \circ) వినిమయ సమూహమని చూపండి.

Or

- (b) $G = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Q\}$ show that $(G, +)$ is an abelian group.

$G = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Q\}$ అగునట్లు $(G, +)$ వినిమయ సమూహమని చూపండి.

10. (a) Show that the union of two sub-groups of group G is also a sub-group iff one is subset of another.

సమూహము G యొక్క రెండు ఉపసమూహాల సమ్మేళనము ఉపసమూహము కావడానికి ఒకటి మరొకదానికి ఉపసమితి అవుతుంది అనునది ఆవశ్యక వర్ణాన్త నియమము అని చూపండి.

Or

- (b) State and prove Lagrange's theorem for finite group.

పరిమిత సమూహాలకు లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

11. (a) Prove that subgroup H of a group G is normal sub-group iff product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G .

సమూహము G లోని ఉపసమూహము H అనునది అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి, G లోని H యొక్క రెండు కుడి సహసమితుల లబ్ధము కుడి సహసమితి అవుతుంది అనునది ఆవశ్యక వర్ణాన్త నియమము అని చూపండి.

Or

- (b) If G is a group and H is sub-group of Index 2 in G then show that H is a normal sub-group.

సమూహము G లో H అనునది సూచిక 2 కల్గిన ఉపసమూహము అయితే H అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

12. (a) Define Kernel of homomorphism. If $f: G \rightarrow G'$ is homomorphism then show that $\text{Ker } f$ is normal sub-group of G .

సమరూపతా కేర్నెలును నిర్వచించండి. $f: G \rightarrow G'$ సమరూపత అయితే $\text{Ker } f$ అనునది G లో అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

Or

- (b) Define homomorphism and Isomorphism between two groups. If $f: G \rightarrow G'$ is homomorphism then show that f is Isomorphism iff $\text{Ker } f = \{e\}$.

సమరూపతలు మరియు తుల్యరూపతలను నిర్వచించండి. $f: G \rightarrow G'$ సమరూపతలయితే f తుల్యరూపతలు కావడానికి $\text{Ker } f = \{e\}$ అనునది ఆవశ్యక, వర్ణాన్త నియమము అని చూపండి.

13. (a) Define permutation group, show that every permutation can be uniquely expressed of a product of disjoint angles.

ప్రస్తార సమూహాన్ని నిర్వచించండి. ప్రతి ప్రస్తారాన్ని వియుక్త చక్రాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చు అని చూపండి.

Or

- (b) Define cyclic group. Show that a group of prime order is cyclic.

చక్రీయ సమూహాన్ని నిర్వచించండి. ప్రధాన తరగతి గల సమూహము చక్రీయమని చూపండి.

[Total No. of Pages : 4

1-3-112

THREE YEAR B.A./B.SC. DEGREE EXAMINATION, DECEMBER-2017

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

THIRD SEMESTER

PART - II : MATHEMATICS

PAPER - I : ABSTRACT ALGEBRA

(W.e.f. 2016-17)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

SECTION - A

సెక్షన్ - ఎ

Answer any Five of the following.

(5 × 5 = 25)

ఈ క్రింది ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

1. Show that a finite semi-group G Satisfies cancellation laws in a group (5)

ఒక పరిమిత అర్ధసమూహము కొట్టి వేతన్యాయాలు తృప్తిపరిస్తే అది సమూహము అవుతుందని చూపండి.

2. If \circ is defined on z , of $a \circ b = a + b - 3$ then show that (z, \circ) in an abelian group. (5)

z , పై 'o' ను $a \circ b = a + b - 3$ గా నిర్వచిస్తే (z, \circ) వినిమయ సమూహము అవుతుందని చూపండి.

3. Show that a finite non-empty complex H of a group G is a sub-group of G iff

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$. (5)

సమూహము G లో పరిమిత శూన్యేతర కాంప్లెక్స్ H అనునది ఉపసమూహము కావడానికి $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ అనునది అవశ్యక, పర్యాప్తనియమము అని చూపండి.

1-3-112

(1)

[P.T.O.]

4. If H is sub-group of a group G then show that the relation $a \equiv b \pmod{H}$ is equivalence relation in G . (5)

సమూహము G లో H ఉపసమూహముయితే $a \equiv b \pmod{H}$ అను సంబంధము తుల్యసంబంధము అని చూపండి.

5. Show that intersection of any two normal sub-groups of a group is a normal sub-group. (5)

ఒక సమూహము యొక్క రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాల ఛేదనము అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

6. Define Kernel of homomorphism. If $f: G \rightarrow G'$ is homomorphism then show that $\text{Ker}f$ is normal sub-group of G . (5)

సమరూపతా కేంద్రమును నిర్వచించండి $f: G \rightarrow G'$ సమరూపలయితే $\text{ker}f$ అనునది G లో అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపండి.

7. If $f = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 8\ 7\ 6)$, $g = (4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 2\ 8)$ (are cyclic permutational) Show that $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$. (5)

$f = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 8\ 7\ 6)$, $g = (4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 2\ 8)$ (are cyclic permutational) అనునవి చక్రీయ ప్రస్తారాలయితే Show that $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

8. Show that $G = \{1, -1, i, -i\}$ is a cyclic group w.r. to multiplication. (5)

$G = \{1, -1, i, -i\}$ అనునది గుణకారపరిక్రీయ దృష్ట్యా చక్రీయ సమూహము అని చూపండి.

SECTION - B

సెక్షన్ - బి

Answer all Five questions. Each question carries 10 marks.

(5 × 10 = 50)

9. a) Show that the set $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ n & n \end{bmatrix} \middle| n \neq 0 \in \mathbb{R} \right\}$ is a group w.r. to multiplication of

matrices. Is it arelian?

(10)

$$G = \left\{ \left[\begin{array}{cc} x & x \\ n & n \end{array} \right] \middle/ n \neq 0 \in \mathbb{R} \right\} \text{ అను సమితి మాత్రికల గుణకారము దృష్ట్యా సమూహము అవుతుందని}$$

చూపండి. ఇది వినిమయసమూహము?

OR

- b) Show that the set of all ordered pairs (a, b) of real numbers for which $a \neq 0$ w.r. to operation X defined by $(a, b)X(c, d) = (ac, bc + d)$ is a group. (10)

వాస్తవసంఖ్యల క్రమయగ్మాల సమితి (a, b) లో $a \neq 0$ మరియు X ను $(a, b)X(c, d) = (ac, bc + d)$ గా నిర్వచిస్తు ఇది సమూహము అవుతుందని చూపండి.

10. a) Show that union of Two subgroups of a group G is also a sub-group iff one is sub-set of another. (10)

సమూహము G యొక్క రెండు ఉపసమూహాల సమ్మేళనము ఉపసమూహము కావడానికి ఒకటి మరొకదానికి ఉపసమితి అనునది ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

OR

- b) If H and K are two subgroups of a group G then show that $H K$ is a subgroup iff $H K = K H$. (10)

సమూహము G లో H, K లు రెండు ఉపసమూహాలుంటే $H K$ ఉపసమూహము కావడానికి $H K = K H$ అనునది ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

11. a) Define normal sub-group. Show that a sub-group H of a group G is Normal iff $x H x^{-1} = H, \forall x \in G$. (10)

అభిలంబ ఉపసమూహాన్ని నిర్వచించి, సమూహము G లో H అను ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి $x H x^{-1} = H, \forall x \in G$ అనునది ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

OR

- b) Show that a sub-group H of a group G is normal sub-group iff the product of Two right cosets of H in G is again a right coset (10)

సమూహము G లో H అను ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి, రెండు సది సహసమితుల లబ్ధము సది సహసమితి అవుతుంది అనునది ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

12. a) State and prove fundamental theorem of group homomorphism. (10)

సమూహసమరూపతా మూలసిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

OR

- b) Define homomorphism and Isomorphism between two groups. If $f : G \rightarrow G'$ is homomorphism then show that f is Isomorphism iff $\ker f = \{e\}$. (10)

రెండు సమూహాల మధ్య సమరూపతలు తుల్యరూపతలను నిర్వచించండి $f : G \rightarrow G'$ సమరూపతలయితే అది తుల్య రూపతలు కావడానికి $\ker f = \{e\}$ అనునది ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

13. a) State and prove cayley's theorem on permutation groups. (10)

ప్రస్తారసమూహాల కేలీ సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

OR

- b) Define cyclic group. Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic (10)

చక్రీయ సమూహాన్ని నిర్వచించి ఒక చక్రీయ సమూహము యొక్క ఉపసమూహము చక్రీయ సమూహము అని చూపండి.



1-3-112

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2019

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

THIRD SEMESTER

Part II — Mathematics

Paper I — ABSTRACT ALGEBRA

(w.e.f. 2016-17)

Time : 3 hours

Max. Marks : 75

SECTION - A

సెక్షన్ - ఎ

Answer any FIVE of the following questions. Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

(Marks : $5 \times 5 = 25$)

1. Show that the set Q_+ of all positive rational numbers, form an abelian group under the composition defined by 'o' such that $aob = \frac{ab}{3}, \forall a, b \in R$.
ధన అకరణీయ సంఖ్య సమితి Q_+ పై 'o' పరిక్రియను $a, b \in Q_+$ కు $aob = \frac{ab}{3}$ గా నిర్వచించబడిన (Q_+, o) ఒక వినిమయ సమూహము అని చూపండి.
2. Show that a group $G, a, b \in G$ is abelian iff $(ab)^2 = a^2b^2$.
సమూహము G లో $a, b \in G, (ab)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow G$ వినిమయ సమూహము అని చూపుము.
3. If H and K are two subgroups of a group G , then prove that $H \cap K$ is also a subgroup of G .
ఒక సమూహము G లో H, K లు ఉపసమూహాలు అయితే $H \cap K$ కూడా G లో ఉపసమూహము అవుతుందని చూపుము.
4. Prove that any two right cosets of a subgroup of a group are either disjoint or identical.
ఒక ఉపసమూహము యొక్క ఏదైనా రెండు కుడి సహసమితిలైనా వియుక్తాలు లేదా సమానాలు అని చూపుము.
5. Prove that every subgroup of an abelian group is normal.
వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము, అభిలంబము అని నిరూపించుము.
6. If f is a homomorphism from a group G into a group G' , then prove that $\text{Ker } f$ is a normal Subgroup of G .
సమూహము G నుండి సమూహము G' నకు f అను ప్రమేయము, సంగ్రస్త సమరూపత అయిన, G నకు $\text{Ker } f$ ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

[P.T.O.]

7. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $\{1, -1, i, -i\}$
గుణన సమూహము $\{1, -1, i, -i\}$ కు తుల్యరూపత కలిగిన క్రమ సౌష్ఠ్య సమూహము కనుక్కోండి.
8. Find the generators of the cyclic group $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X_7)$
చక్రీయ సమూహము $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X_7)$ కు జనక మూలకాలను కనుగొనుము.

SECTION - B

సెక్షన్ - బి

Answer ALL questions. Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

(Marks : $5 \times 10 = 50$)

9. (a) Prove that a finite semi group G , satisfying cancellation laws is a group.
ఒక పరిమిత అర్థ సమూహము G కొట్టివేత నియమాలను పాటించిన సమూహము అవుతుందని చూపండి.

Or

- (b) If G is a group and $a, b \in G$, then show that the equations $ax = b$ and $ya = b$ have unique solutions in G .
 G ఒక సమూహము మరియు $a, b \in G$ అయిన G లో $ax = b$ మరియు $ya = b$ సమీకరణాలకు ఏకైక సాధనాలు కలిగి ఉంటాయని చూపండి.

10. (a) Show that the necessary and sufficient condition for a non empty complex H of a group G to be a subgroup of G is $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.
సమూహము G యొక్క శూన్యేతర సంకీర్ణము H , G నకు ఉపసమూహము అగునట్లు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ అని చూపండి.

Or

- (b) State and Prove Lagrange's theorem on groups.
సమూహాలపై లాగ్రాంజ్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

11. (a) Prove that a subgroup H of a group G is Normal iff $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$.
సమూహము G లో H ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము, $\forall x \in G$ కి $xHx^{-1} = H$ నిరూపించుము.

Or

- (b) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G , then prove that H is a normal subgroup.
 G ఒక సమూహము మరియు G లో H ఉపసమూహము. H యొక్క సూచిక 2 అయితే G లో H అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించుము.

12. (a) State and Prove fundamental theorem of homomorphism of groups.
సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూలసిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

- (b) Let f be a homomorphism from a group G into a group G' . Then prove that f is a homomorphism iff $\text{Ker } f = \{e\}$.
సమూహము G నుండి సమూహము G' కు నిర్వచించబడిన సంగ్రహ సమరూపత, అన్వేక సమరూపత $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e\}$ నిరూపించుము.
13. (a) State and prove Cayley's theorem.
కేయలీ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

- (b) Prove that every infinite cyclic group is isomorphic to Z , the additive group of integers.
ఏ అనంత చక్రియ సమూహము అయినా $(Z, +)$ సమూహమునకు తుల్యరూపత ఉండునని చూపండి.

